Лекция 2. Производная сложной функции, зависящей от двух переменных. Полный дифференциал и полная производная сложной функции. Экстремум функции двух переменных.

Тлеулесова Айгеим
Мекемтасовна

Цель лекции

- **Сформировать понимание производной сложной функции, полного дифференциала и критериев экстремума функции двух переменных.**

Основные вопросы

- 1. Производная сложной функции двух переменных
- 2. Полный дифференциал функции
- 3. Производная неявные функции
- 4. Производные высших порядков
- 5. Экстремум функции двух переменных
- 6. Необходимые и достаточные условия экстремума

Производная сложной функции

1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Аналогично, если z = $f(u, v, w)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ и $w = w(x)$ являются функциями независимой переменной x, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

2) случай двух независимых переменных

.

Если z = *f*(*u*, *v*) – функция от двух переменных *u* и *v*, где каждая из функций, в свою очередь, является функцией двух независимых переменных x и y, то z есть *функция независимых переменных* x *и* y, а ее частные производные по переменным x и y

вычисляются по формулам:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Пример.

1) Найти $\frac{dZ}{dx}$, если $z = e^{3u+2v}$,

где $u = \cos x$, $v = x^2$.

Решение. Найдем частные производные

$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{3u+2v} \cdot (3u + 2v)'_u = 3 \cdot e^{3u+2v}$,

$\frac{\partial z}{\partial v} = 2 \cdot e^{3u+2v}$, $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x$, $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$,

тогда $\frac{dZ}{dx} = 3 \cdot e^{3u+2v} \cdot (-\sin x) + 2 \cdot e^{3u+2v} \cdot 2x =$

$= e^{3u+2v}(4x - 3\sin x)$.

Производная неявной функции

1) Случай одной независимой переменной.

Для того, чтобы, не решая уравнение $f(x, y) = 0$ относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$$

Пример 1.

Найти производную функции

$$x\cdot e^{2y} - y\cdot e^{2x} = 0.$$

<u>*Решение.*</u> Найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - 2y\cdot e^{2x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\cdot e^{2y} - e^{2x}.$$

Тогда получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{2y} - 2y\cdot e^{2x}}{2x\cdot e^{2y} - e^{2x}}.$$

2) Случай двух независимых переменных

- Аналогично, если уравнение $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ – дифференцируемая функция, определяет z как функцию независимых переменных x и y и $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции найдем по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Пример

Дана функция $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 6, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x-6}{2z} = \frac{3-x}{z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

Частные производные высших порядков

Определение. **Частными производными *второго порядка*** называются частные производные от частных производных первого порядка.
Обозначения:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Определение. Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ называются *смешанными частными производными 2- го порядка.*

Теорема. Если частные производные второго порядка функции z = $f(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(Аналогично равны смешанные производные высших порядков).

Производные третьего порядка обозначаются так:

$$(z''_{xx})'_x = z'''_{xxx} = f'''_{xxx}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},$$

$$(z''_{xx})'_y = z'''_{xxy} = f'''_{xxy}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$ и т.д.

Пример

Дана функция z = $yln(xy^2)$. Найти $z''_{xy}(1;-1)$, $z''_{yy}(1;-1)$.

Решение. 1) Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{xy^2}\cdot y^2 = \frac{y}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = ln(xy^2) + \frac{y}{xy^2}\cdot 2xy = ln(xy^2) + 2 \ ,$$

2) Найдем производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (ln(xy^2) + 2)'_y = \frac{1}{xy^2}\cdot 2xy = \frac{2}{y}.$$

Следовательно,

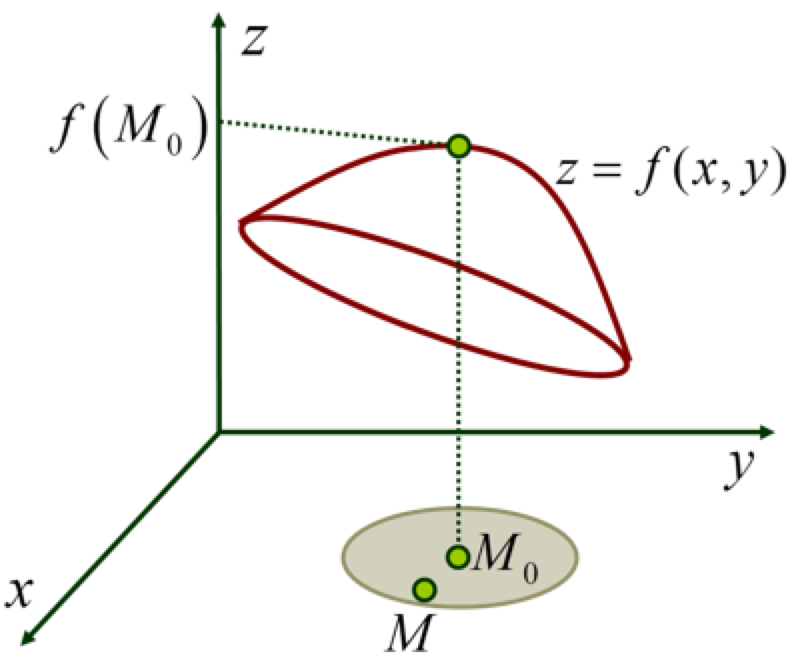
$$z''_{xy}(1;-1) = 1, z''_{yy}(1;-1) = -2.$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство: $f(M_0) \geq f(M)$.

или

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума функции $z=f(x,y)$, если $\exists U(M_0) \ : \ \forall M(x,y) \in U(M_0) \ \ f(M_0) \geq f(M)$.



M_0 – точка максимума

Значение функции в точке локального максимума называется локальным максимумом функции.

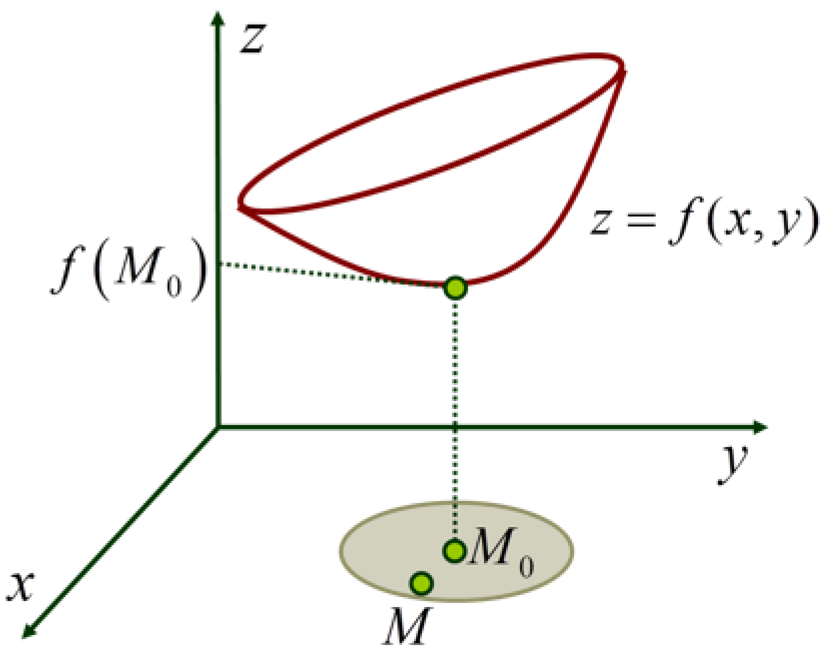
$f(M_0)$ – максимум функции

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального минимума функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любой точки $M(x,y)$ из этой окрестности выполняется неравенство: $f(M_0) \le f(M)$.

или

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального минимума функции $z=f(x,y)$, если $\exists U(M_0) \; : \; \forall M\left(x,y\right) \in U(M_0) \;\; f(M_0) \le f(M)$.



M_0 – точка минимума

Значение функции в точке локального минимума называется локальным минимумом функции.

$f(M_0)$ – минимум функции

Теорема. (необходимое условие существования экстремума)

Пусть функция ***z=f(x,y)*** дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в ней экстремум, тогда частные производные 1-го порядка в этой точке равны 0.

Точка $M_0(x_0,y_0)$, в которой частные производные 1-го порядка равны 0, называется стационарной точкой.

Теорема. (достаточное условие существования экстремума)

Пусть в критической точке $M_0(x_0,y_0)$ и её некоторой окрестности функция ***z=f(x,y)*** имеет все производные 2-го порядка.

Пусть
$$D(M_0)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2, \quad \text{где}$$

$$A=z''_{xx}(M_0), \;\; B=z''_{xy}(M_0), \;\; C=z''_{yy}(M_0).$$

Тогда: 1) если $D(M_0)<0,$ то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремума нет.

2) если $D(M_0)>0,$ то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум есть, причём:

а) если ***A>0***, то это локальный минимум,

б) если ***A<0***, то это локальный максимум.

Схема исследования функции $z=f(x,y)$ на экстремум

1) Найти частные производные 1-го порядка.

2) Решить систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$

3) Обозначить стационарные точки $M_1(x_1;y_1),\ \ M_2(x_2;y_2),\ \ M_3(x_3;y_3)..$

4) Найти все производные 2-го порядка.

5) Для каждой стационарной точки вычислить ***A, B, C, D.***

6) Сделать выводы по признаку Сильвестра.

7) Найти экстремум.

Пример

Исследовать функцию $z = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$ на экстремум.

$$z'_x = 4y \cdot 2x + 24y \cdot 1 + 0 = 8xy + 24y$$

$$z'_y = 4x^2 \cdot 1 + 24x \cdot 1 + 2y + 32 - 0 = 4x^2 + 24x + 2y + 32$$

$$\begin{cases} 8xy + 24y = 0 \\ 4x^2 + 24x + 2y + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y(x+3) = 0 \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$8y(x+3) = 0$$

$$y = 0 \ \text{или} \ x = -3$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ 2x^2 + 12x + y + 16 = 0 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} \boxed{y=0} \\ 2x^2+12x+y+16=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x^2+12x+16=0$$

$$x^2+6x+8=0$$

$$\boxed{x=-2} \text{ или } \boxed{x=-4}$$

$$\begin{cases} \boxed{x=-3} \\ 2x^2+12x+y+16=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2(-3)^2+12(-3)+y+16=0$$

$$18-36+y+16=0$$

$$y-2=0$$

$$\boxed{y=2}$$

Получили три стационарные точки: $M_1(-2;0),\ M_2(-4;0),\ M_3(-3;2).$

$$z''_{xx}=(8xy+24y)'_x=8y$$

$$z''_{xy}=(8xy+24y)'_y=8x+24$$

$$z''_{yy}=\left(4x^2+24x+2y+32\right)'_y=2$$

Пример

$$A = z''_{xx} = 8y; \quad B = z''_{xy} = 8x + 24; \quad C = z''_{yy} = 2$$

Найдём для каждой стационарной точки **A, B, C, D** и сделаем выводы:

$$M_1(-2;0)$$

$$A(-2;0) = 0; \quad B(-2;0) = 8\cdot(-2) + 24 = 8; \quad C(-2;0) = 2$$

$$D(-2;0) = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 64 = -64 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{экстремума нет}$$

$$M_2(-4;0)$$

$$A(-4;0) = 0; \quad B(-4;0) = 8\cdot(-4) + 24 = -8; \quad C(-4;0) = 2$$

$$D(-4;0) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 64 = -64 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{экстремума нет}$$

Пример

$$M_3(-3;2)$$

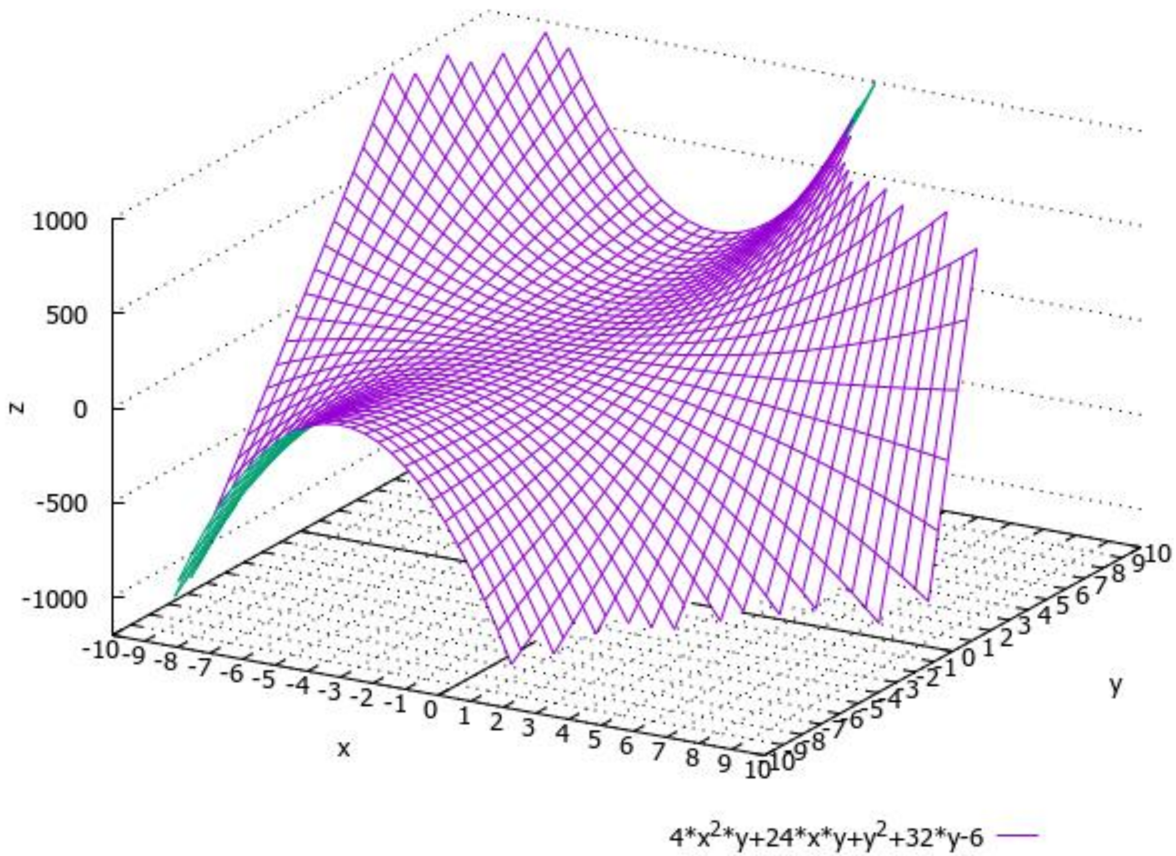
$$A(-3;2)=16;\quad B(-3;2)=8\cdot(-3)+24=0;\quad C(-3;2)=2$$

$$D(-3;2)=\begin{vmatrix}16 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=32-0=32>0 \quad\Rightarrow\quad \text{экстремум есть}$$

$$A(-3;2)=16>0 \quad\Rightarrow\quad \text{в точке } M_3 \text{ локальный минимум}$$

Найдём этот минимум (экстремум):

$$z_{\min}=z(-3;2)=4\cdot(-3)^2\cdot 2+24\cdot(-3)\cdot 2+2^2+32\cdot 2-6=-10$$



1000
500
0
-500
-1000
z
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
y
4*x^2*y+24*x*y+y^2+32*y-6

Контрольные вопросы:

1. Что такое сложная функция двух переменных?
2. Как вычислить частные производные сложной функции?
3. Что называется неявной функцией?
4. Какова формула производной неявной функции?
5. Как определить тип критической точки?
6. Когда смешанные производные равны?

Рекомендуемая литература:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы математического анализа.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального анализа.
4. Краснов М.Л. Сборник задач по матанализу.